Lösung 1.11

(1) Man hat $\mathbb{C}[y] = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$, $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathbb{C}_\lambda \underset{\mathfrak{h}}{\cong} M(\lambda)$.

Nehme $v_i := \frac{1}{i!} y^i v_\lambda$. Dann gilt

$$h v_i = (\lambda - 2i) v_i \quad , \quad y v_i = \frac{1}{i!} y^{i+1} v_\lambda = (i+1) v_{i+1} ,$$

sowie
$$x v_{i+1} = \frac{1}{(i+1)!} \sum_{a+b=i} y^a [x,y] y^b v_\lambda$$
$$= \frac{1}{i+1} \sum_{a+b=i} \frac{b!}{i!} y^a \underbrace{h v_b}_{=(\lambda-2b) v_b}$$
$$= \frac{1}{i+1} \sum_{a+b=i} \underbrace{\frac{b!}{i!} (\lambda-2b)(b+1)\cdots(b+a)}_{=\lambda-2b} \underbrace{v_{a+b}}_{=v_i}$$
$$= \left(\lambda - \frac{i}{2}\right) v_i = (\lambda - i) v_i .$$

(2) $n = \lambda \in \mathbb{N} \underset{\text{Prop. 1.9}}{\Rightarrow} v_{n+1}$ max. Vektor.

Weiter: $\forall k \leq n \quad x^k v_k = (n-k+1) x^{k-1} v_{k-1}$
$$= \cdots = \underbrace{(n-k+1) \cdots n}_{\neq 0} v_\lambda$$

Daraus folgt leicht, dass $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) v_{n+1} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) v_{n+1} = \langle v_k \mid k > n \rangle_{\mathbb{C}}$
$$= N(n)$$

der maximale Untermodul von $L(n)$ ist. Folglich

$$\dim L(n) = n+1 < \infty .$$

Ist $\lambda \notin \mathbb{N}$, so ist $\forall\, k \in \mathbb{N},\ k>0$:

$$a^k v_k = \underbrace{(\lambda - k+1)\cdots\lambda}_{\neq 0}\, v_\lambda \neq 0,$$

also v_λ ~~$\notin$~~ in jedem Untermodul $\neq 0$ enthalten.

(Jeder Untermodul ist halbeinfach als $\mathfrak{h}$-Modul, also der Aufspann der in ihm enthaltenen Gewichtsvektoren.)

Es folgt: $M(\lambda)$ ist einfach, also $= L(\lambda)$.

In diesem Fall ist $\dim L(\lambda) = \infty$.

Insbesondere gilt wieder für $\lambda = n \in \mathbb{N}$:

Die offensichtlich surjektive $\mathfrak{g}$-lin. Abb

$$L(-n-2) = M(-n-2) \longrightarrow N(n) \quad \text{ist } \underline{\text{injektiv}}.$$
$$v_{-n-2} \longmapsto v_{n+1}$$

Daher hat man i.d.F. eine keS $0 \to L(-n-2) \to M(n) \to L(n) \to 0$

Ist umgekehrt $0 \to L(-\lambda-2) \to M(\lambda) \to L(\lambda) \to 0$ exakt,

so ist $M(\lambda)$ nicht einfach, also $\lambda = n \in \mathbb{N}$.

(3) Sei $M \in \mathcal{O}$. $\exists$ Filtrierung $M_0 = 0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$

s.d. $\forall i$: $M_{i+1}/M_i \cong M(\lambda_i)/I_i$ f. gew. λ_i (Kor. 1.4) & Prop. 1.6.

Es folgt $\forall \lambda \in \Pi(M)$:

$$\dim M_\lambda \leq \sum_{j=1}^{n} \dim (M_j/M_{j-1})_\lambda \leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\dim M(\lambda_j)_\lambda}_{\overset{(i)}{\leq} 1} \leq n$$

Aber $\dim (M(\lambda)\otimes M(\mu))_{\lambda+\mu-2k} \overset{(i)}{=} \#\{(i,j) \mid k = i+j\} = k+1$

ist als Fkt. von k unbeschränkt. Also $M(\lambda)\otimes M(\mu) \notin \mathcal{O}$.

Da $M(\lambda) \twoheadrightarrow M$, hängt χ_λ nur von λ ab.

Bem. 1.16

PBW: $$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = (\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+ + \mathfrak{n}\,\mathfrak{n}^-\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{h})$$
$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{pr} \mathcal{U}(\mathfrak{h})$$

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+ v_\lambda = 0 \qquad \mathfrak{n}^-\mathcal{U}(\mathfrak{g}) v_\lambda \subseteq \bigoplus_{\mu < \lambda} M(\lambda)_\mu$$

$$\Rightarrow \qquad \chi_\lambda(z) v_\lambda = z v_\lambda = pr(z) v_\lambda = \lambda(pr(z)) v_\lambda .$$

$$\xi := pr|_{Z(\mathfrak{g})} : Z(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \quad \text{Harish-Chandra Homomorphismus}$$

Es gilt $\xi(zz')(\lambda) = \chi_\lambda(zz') = \chi_\lambda(z)\chi_\lambda(z') = (\xi(z)\xi(z'))(\lambda)$

(mit $\mathcal{U}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$) $\Rightarrow$ ξ Algebra-Hom.

Def 1.17 ~~I~~ Sei $\rho := \sum_{i=1}^{\ell} \varpi_i$. Für $w \in W$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$

$$w \cdot \lambda := w(\lambda + \rho) - \rho .$$

Bahnen dieser Wirkung: Linkage-Klassen

Prop. 1.18. $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in \mathfrak{h}^*$. ~~Äq sind~~ Es gilt

(1) $\exists w : \mu = w \cdot \lambda \Rightarrow$ (2) $\chi_\lambda = \chi_\mu$.

Beweis: $n := \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$.

$n \geq 0$: $s_i \cdot \lambda = \underbrace{s_i(\lambda)}_{\lambda - n\alpha_i} + \underbrace{s_i(\rho) - \rho}_{= -\alpha_i} = \lambda - (n+1)\alpha_i$

Prop 1.9: $M(s_i \cdot \lambda) \subsetneq M(\lambda) \Rightarrow \chi_\lambda = \chi_{s_i \cdot \lambda}$.

$n = -1$: $s_i \cdot \lambda = \lambda$ ✓

$n < -1$: $\langle s_i \cdot \lambda, \alpha_i^\vee \rangle = n - 2(n+1) = -n - 2 \geq 0$

Mit dem ersten Fall $\chi_{s_i \cdot \lambda} = \chi_{s_i \cdot s_i \cdot \lambda} = \chi_\lambda$. □

Bem. 1.19 Man kann Prop. 1.9 wie folgt umformulieren:

Ist $n := \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{N}$, so gilt: $\exists$ $\mathfrak{g}$-lin Abb.

$M(s_i \cdot \lambda) \xrightarrow[\neq 0]{} M(\lambda)$, d.h. $L(s_i \cdot \lambda)$ ist Quotient eines Untermoduls (Subquotient) von $M(\lambda)$.

Def. 1.20 Der geshiftete Harish-Chandra-Homomorphismus $\psi : \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ ist definiert durch

$$\psi(z)(\lambda) := \xi(z)(\lambda - \rho) = \chi_{\lambda - \rho}(z).$$

Als Korollar zu Prop. 1.18. erhalten wir:

<u>Theorem 1.21</u> (1) Sind $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ in der gleichen Linkage-Klasse, so gilt $\chi_\lambda = \chi_\mu$.

(2) Das Bild von ψ liegt in $S(\mathfrak{h})^W = \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$, der Menge aller W-invarianten Polynome auf $\mathfrak{h}^*$ für die übliche W-Wirkung.

<u>Beweis</u>: (1) Sei $w \in W, z \in Z(\mathfrak{g})$. Für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt:

$$p(\lambda) := \chi_{w\cdot\lambda}(z) - \chi_\lambda(z) \overset{\text{Prop. 1.18}}{=} 0.$$ Da Λ eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ ist, ist Λ Zariski-dicht, also $p = 0$.

(2) $$\psi(z)(w\lambda) = \chi_{\underbrace{w\lambda - \rho}_{w\cdot(\lambda+\rho)}}(z) \underset{(1)}{=} \chi_{\lambda+\rho}(z) = \psi(z)(\lambda).$$ □.

Es gilt auch die Umkehrung:

<u>Theorem 1.22</u> (Harish-Chandra-Isomorphismus)

(1) ψ ist ein Isomorphismus auf $S(\mathfrak{h})^W$.

(2) Es gilt: $\forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$: $\chi_\lambda = \chi_\mu \Leftrightarrow W\cdot\lambda = W\cdot\mu$.

(3) Jeder zentrale Charakter $\chi: Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ ist von der Form χ_λ f.e. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

<u>Beweis</u> (Skizze):

(1) Chevalley-Restriktionssatz:

$$S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\ \cong\ } \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W = S(\mathfrak{h})^W$$
$$p \longmapsto p|_{\mathfrak{h}^*}$$

$(\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_\alpha \mathfrak{g}^\alpha)$

Man betrachte den Komplex

$$C: \; 0 \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\psi} S(\mathfrak{h})^W \to 0$$

Da ψ ein Algebrahom. ist, ist C filtriert. Es handelt sich um eine einseitig beschränkte Filtrierung mit $C = \bigcup_{p=0}^{\infty} F^p C$,

also konvergiert die assoz. Spektralsequenz (E^r) gegen C.
(Vgl. Weibel, Homol. Alg.) Aber

$$E^0 = \operatorname{gr} C \; : \quad 0 \to S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \xrightarrow[\text{res}]{} S(\mathfrak{h})^W \to 0$$

ist exakt nach Chevalley $\Rightarrow$ $H(C) = 0$.

(2) Sei $W.\lambda \cap W.\mu = \emptyset$. Dann ex. $p \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$
mit $p(W(\lambda+\rho)) = 1$, $p(W(\mu+\rho)) = 0$. Mit

$$\bar{p}(\nu) := \frac{1}{\# W} \sum_{w \in W} p(w\nu) \quad \text{gilt} \quad \bar{p} \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$$

und $\bar{p}(W(\lambda+\rho)) = 1$, $\bar{p}(W(\mu+\rho)) = 0$.

Sei $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ mit $\psi(z) = \bar{p}$. Dann gilt

$$\chi_\lambda(z) = (\lambda+\rho)(\psi(z)) = \bar{p}(\lambda+\rho) = 1$$

$$\chi_\mu(z) = (\mu+\rho)(\psi(z)) = \bar{p}(\mu+\rho) = 0 .$$

(3) Sei $\chi : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Charakter und

$\varphi := \chi \circ \gamma^{-1} : S(\mathfrak{h})^W \longrightarrow \mathbb{C}$. Es gilt $\forall p \in S(\mathfrak{h})$:

$$\underbrace{\prod_{w \in W} (t - wp)}_{\substack{\shortparallel \\ (t-p)\cdots}} = t^{\# W} + \text{l.o.t.} \in S(\mathfrak{h})^W[t]$$

Also ist $S(\mathfrak{h})$ integrale Erweiterung von $S(\mathfrak{h})^W$ und es gibt eine FS $\tilde{\varphi} : S(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbb{C}$ zu einem Charakter. Es folgt $\tilde{\varphi} \in \operatorname{Spec}_m S(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}^*$. $\square$.

<u>Bem. 1.23</u> Nach einem Satz von Chevalley gilt sogar

$$S(\mathfrak{h})^W \cong \mathbb{C}[T_1, \dots, T_\ell], \text{ wobei}$$

T_i einer homogenen Invariante von Grad d_i mit $\# W = d_1 \cdots d_\ell$ entspricht. ($\min_i d_i = 2$ entspricht dem Casimir-Operator.) [Der Satz gilt für endl. Gruppen, die von Spiegelungen erzeugt sind.]

<u>Theorem 1.24</u> Die Kategorie $\mathcal{O}$ ist Artinsch, d.h. jeder Modul $M \in \mathcal{O}$ hat DCC für Untermoduln. Insbesondere gilt $\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(M, N) < \infty \quad \forall M, N \in \mathcal{O}$.

<u>Beweis.</u> Aufgrund von Kor. 1.4 und Prop. 1.6 reicht es, die erste Aussage im Fall $M = M(\lambda)$ zu beweisen. Sei $V := \sum_{w \in W} M(\lambda)_{w \cdot \lambda}$, so dass $\dim V < \infty$. Sei $0 \neq N \subsetneq M$ ein Untermodul.

$Z(\mathfrak{g})$ wirkt auf N durch χ_λ. Für jeden maximalen Vektor $v \in N$ gilt daher: sein Gewicht ist in $W \cdot \lambda$ (gemäß Theorem 1.22), also $v \in V$.
Da $N \in \mathcal{O}$, wird N von seinen maximalen Vektoren erzeugt, also von $V \cap N$. Es folgt die Beh.

Sei $M \in \mathcal{O}$. Nach dem obigen hat M eine Jordan-Hölder-Reihe

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_m = M \quad \text{mit } M_{i+1}/M_i \cong L(\lambda_{i+1}).$$

Jedes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, L(\lambda))$ ist eindeutig bestimmt durch seine Werte auf den max. Vektoren $v_i \in M_i$, die auf die von $L(\lambda_i)$ abgebildet werden.

Es gilt $\dim \{f \mid f(v_i) = 0 \ \forall i < m\} =$

$$= \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L(\lambda_m), L(\lambda)) = 1$$

~~Bew~~ Induktion

$$\dim \{ f \mid f(v_i) = 0 \ \forall i \leq m-k \} \leq k,$$

also $\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, L(\lambda)) \leq m$.

Sei $N \in \mathcal{O}$ $\exists$ JH Reihe $0 \neq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_n = N$

mit $N_{i+1}/N_i \cong L(\mu_i)$.

Es ist $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, N) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, N_i)$$

und da $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, -)$ links-exakt ist, $\exists$ inj lin. Abb.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, N_{i+1}) / \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, N_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, L(\mu_i))$$

Es folgt $$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, N) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, L(\mu_i)) \leq m \cdot n.$$

$\square$.

Def. 1.25 $M \in \mathcal{O}$. ↓ 15.11.2013

$\ell(M) :=$ Länge einer Jordan-Hölder-Reihe (~~...~~ Kompositionsreihe)

$[M : L(\lambda)] =$ Vielfachheit von $L(\lambda)$ in einer Kompositionsreihe

Gesehen $\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, L(\lambda)) \leq [M : L(\lambda)] \leq \ell(M)$.